Examen HAVO
2021

tijdvak 2
dinsdag 22 juni
13.30 - 16.30 uur

wiskunde B

Dit examen bestaat uit 20 vragen.
Voor dit examen zijn maximaal 78 punten te behalen.
Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

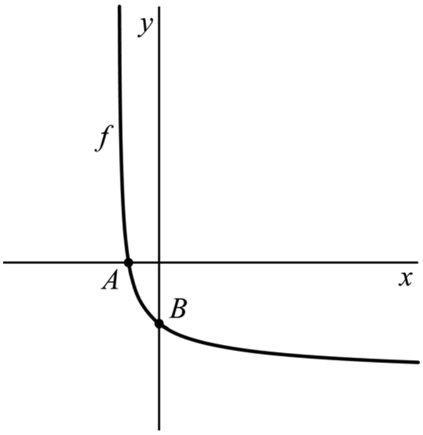
Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd.
Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

Rakende grafieken

De functie f is gegeven door $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3x+1}} - 2$. De grafiek van f snijdt de x-as in punt A en de y-as in punt B. Zie figuur 1.

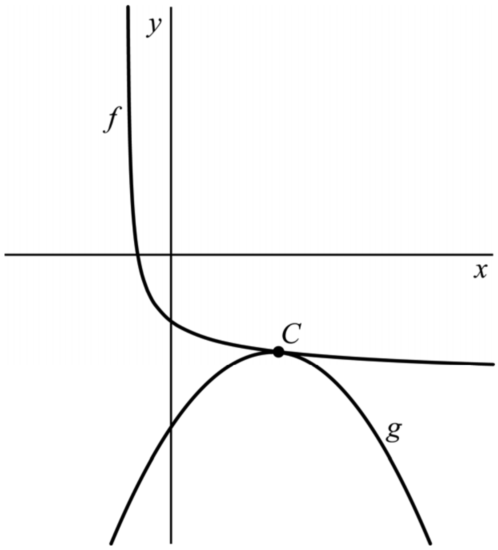
figuur 1



4p **1** Bereken exact de afstand tussen A en B.

De functie g is gegeven door $g(x) = -2x^2 + 3x + p$. De grafieken van f en g raken elkaar in het punt C. Zie figuur 2.

figuur 2



De x-coördinaat van C noemen we x_C en er geldt: $x_C \approx 0{,}81$.

3p **2** Bereken p. Geef je eindantwoord in één decimaal.

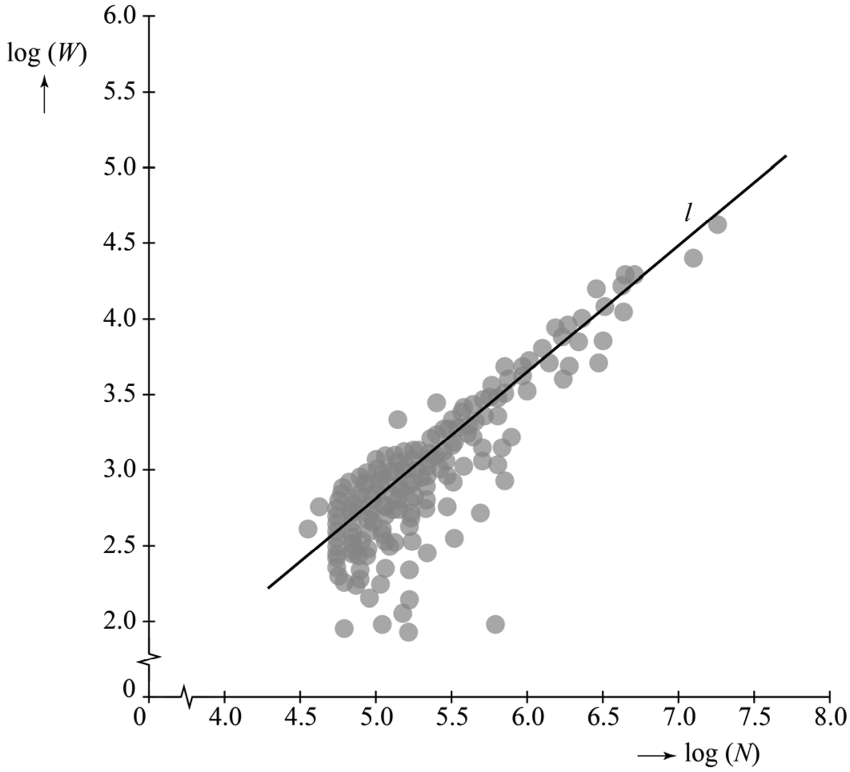
Dat de grafieken van f en g elkaar raken in punt C betekent dat de helling van beide grafieken in dat punt gelijk is. De x-coördinaat van C is hierboven in twee decimalen benaderd.

6p **3** Bereken met behulp van differentiëren de waarde van x_C nauwkeuriger. Geef je eindantwoord in drie decimalen.

Stedelijke gebieden

De Amerikaan Bettencourt heeft onderzoek gedaan naar een mogelijk verband tussen het aantal inwoners N en de lengte van het wegennet W in mijlen in een stedelijk gebied. Om van een aantal stedelijke gebieden de gegevens in één figuur duidelijk te kunnen weergeven is van elk gebied $\log(W)$ uitgezet tegen $\log(N)$. Het resultaat is de puntenwolk in de figuur.

figuur



Bettencourt heeft een verband tussen $\log(W)$ en $\log(N)$ opgesteld. In de figuur is de lijn l getekend die dit verband weergeeft. Deze figuur staat ook op de uitwerkbijlage.

3p **4** Bepaal met behulp van lijn l op de uitwerkbijlage de lengte van het wegennet in een gebied met 1 miljoen inwoners. Geef je eindantwoord in honderden mijlen.

Een formule voor l is van de vorm

$$\log(W) = a \cdot \log(N) + b \qquad (1)$$

Uit de figuur volgt dat een gebied met 100 000 inwoners een wegennet heeft van ongeveer 650 mijl en een gebied met 10 000 000 inwoners een wegennet heeft van ongeveer 31 000 mijl.

4p **5** Bereken a en b met behulp van deze gegevens. Geef de getallen in je eindantwoord in twee decimalen.

In zijn onderzoek komt Bettencourt tot de formule:

$$W = 0{,}043 \cdot N^{\frac{5}{6}} \qquad (2)$$

Voor de volgende vraag vergelijken we twee stedelijke gebieden met elkaar: gebied A en gebied B. Voor gebied B geldt dat het twee keer zoveel inwoners heeft als gebied A.

3p **6** Bereken met behulp van formule (2) hoeveel procent de lengte van het wegennet van gebied B groter is dan de lengte van het wegennet van gebied A. Geef je eindantwoord in hele procenten.

De verhouding tussen N en W wordt **verkeersdruk** D genoemd.

Dus:

$$D = \frac{N}{W} \qquad (3)$$

Hierin is D het aantal inwoners per mijl.

In de praktijk geldt: als in een stedelijk gebied het aantal inwoners toeneemt, neemt de verkeersdruk ook toe (ondanks de toename van de lengte van het wegennet).

Voor D moet dus gelden dat de grafiek van D als functie van N stijgend is.
In drie stappen kan dit worden onderzocht:

a Druk D met behulp van de formules (2) en (3) uit in N.

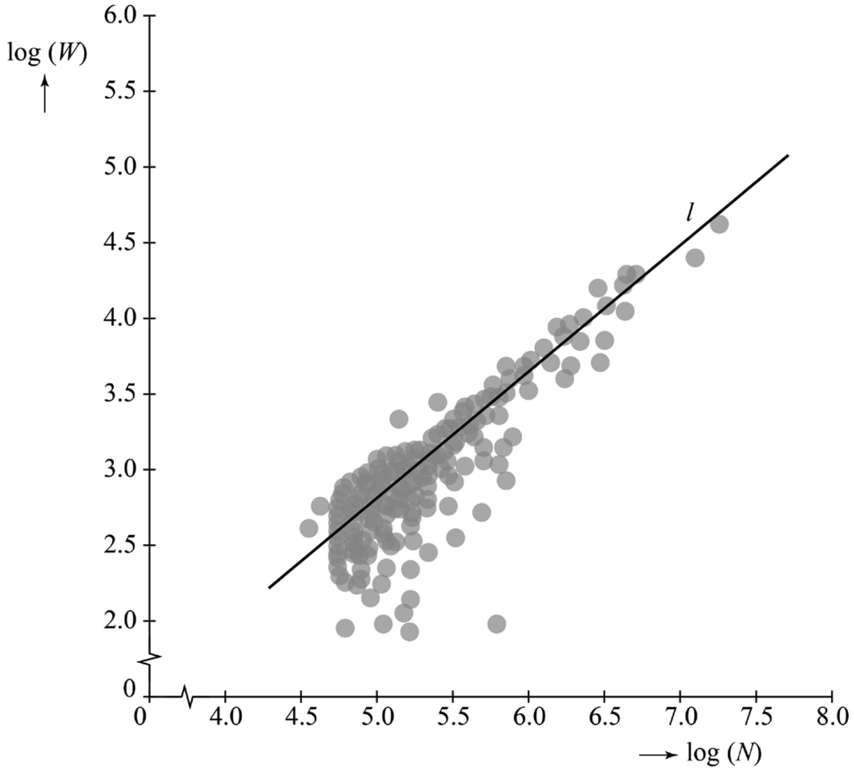
b Bepaal de afgeleide $\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}N}$ van de bij stap a gevonden formule.

c Onderzoek of deze afgeleide voor alle waarden van N groter is dan 0.

4p **7** Onderzoek met dit stappenschema of de grafiek van D als functie van N inderdaad stijgend is.

uitwerkbijlage

4



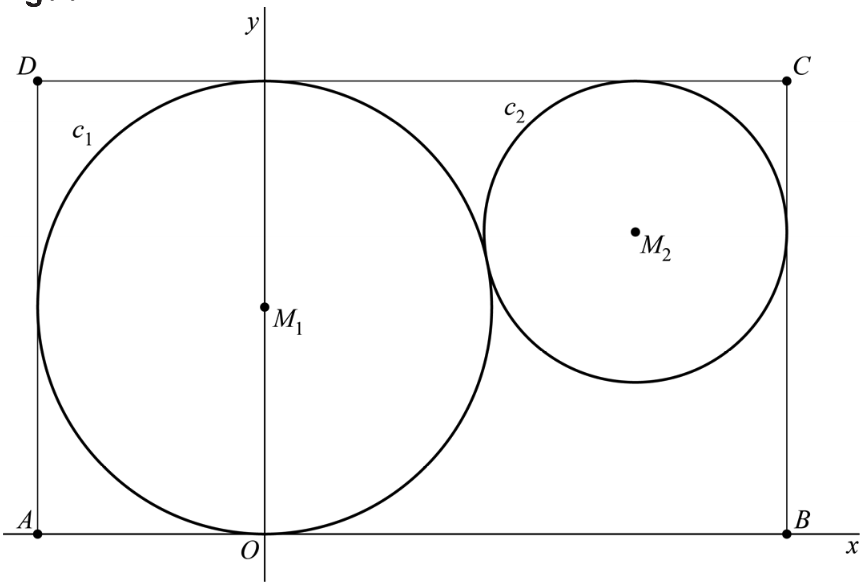
Rechthoek om cirkels

Cirkel c_1 met middelpunt M_1 wordt gegeven door $x^2 + (y-3)^2 = 9$.
Cirkel c_2 met straal 2 en middelpunt M_2 raakt c_1.

De twee cirkels worden omsloten door een rechthoek $ABCD$ zodanig dat:
- de hoekpunten A en B op de x-as liggen;
- de lengte van zijde AD gelijk is aan de diameter van c_1;
- c_1 de zijden AB, CD en AD raakt;
- c_2 de zijden BC en CD raakt.

Zie figuur 1. Deze figuur staat ook op de uitwerkbijlage.

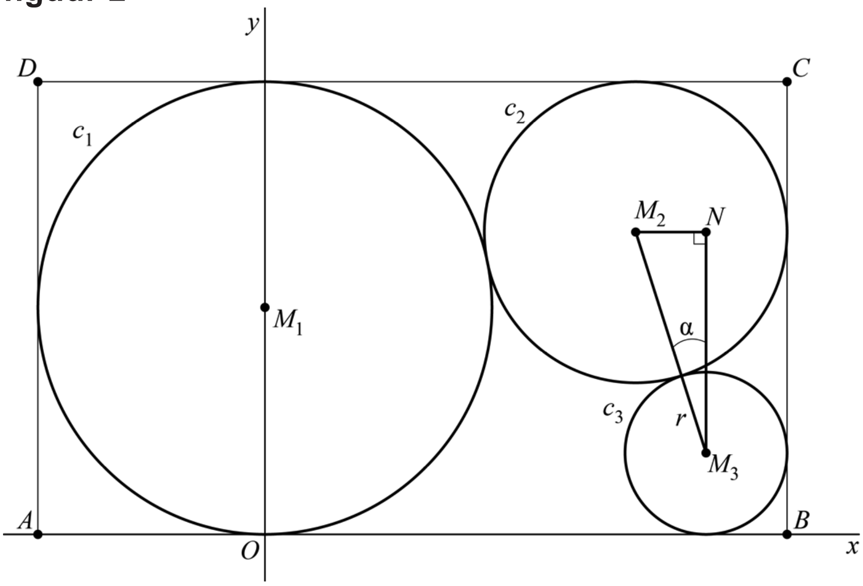
figuur 1



5p **8** Bereken exact de coördinaten van M_2. Je kunt hierbij gebruik maken van de figuur op de uitwerkbijlage.

Verder is gegeven cirkel c_3 met middelpunt M_3. Deze cirkel raakt c_2 en de zijden AB en BC. Zie figuur 2.

figuur 2



In figuur 2 is ook de driehoek M_2M_3N aangegeven, waarbij punt N dezelfde x-coördinaat heeft als M_3 en dezelfde y-coördinaat als M_2.
In driehoek M_2M_3N is $\alpha = \angle M_2M_3N$ en is hoek N een rechte hoek.
Er geldt:

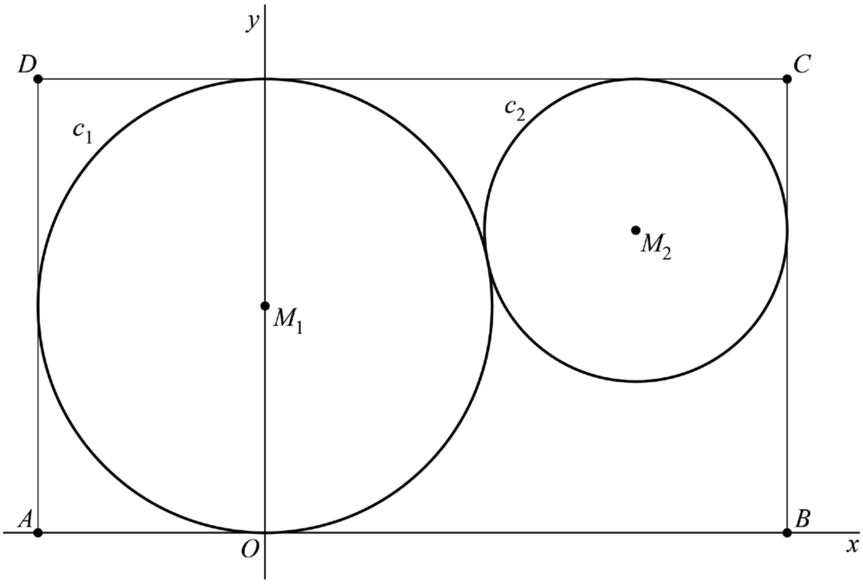
$$\sin(\alpha) = \frac{2-r}{r+2}$$

Hierin is r de straal van c_3. Zie figuur 2.

3p **9** Bewijs de juistheid van deze formule.

uitwerkbijlage

8

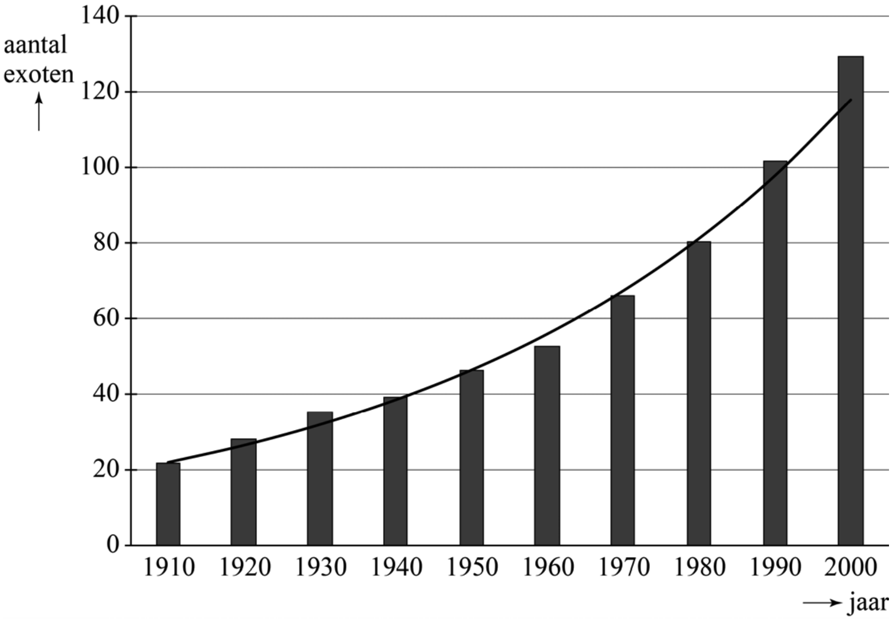


Exoten en rodelijstsoorten

De bruine rat, de Japanse oester en de Amerikaanse vogelkers zijn voorbeelden van dier- en plantensoorten die oorspronkelijk niet in Nederland voorkwamen, maar die bewust of onbewust door de mens in Nederland zijn ingevoerd. Zulke soorten worden **exoten** genoemd.

In figuur 1 is voor de periode 1910 – 2000 eens per tien jaar, telkens op 1 januari van het aangegeven jaar, het aantal exoten in Nederland weergegeven. In deze figuur is ook een grafiek weergegeven die de ontwikkeling van deze aantallen benadert.

figuur 1



Uit figuur 1 valt af te lezen dat het aantal exoten in Nederland in de periode van 1 januari 1910 tot 1 januari 1950 van 22 tot 46 is toegenomen.

Neem aan dat het aantal exoten sinds 1 januari 1910 exponentieel is gegroeid. Dan volgt uit de gegevens voor de periode 1910 – 1950 dat dit aantal elke tien jaar met ongeveer 20% is toegenomen.

4p **10** Bereken met behulp van de gegevens van 1910 en 1950 dit percentage nauwkeuriger. Geef je eindantwoord in één decimaal.

We gaan bij de volgende vraag uit van een toename van 20% per tien jaar.

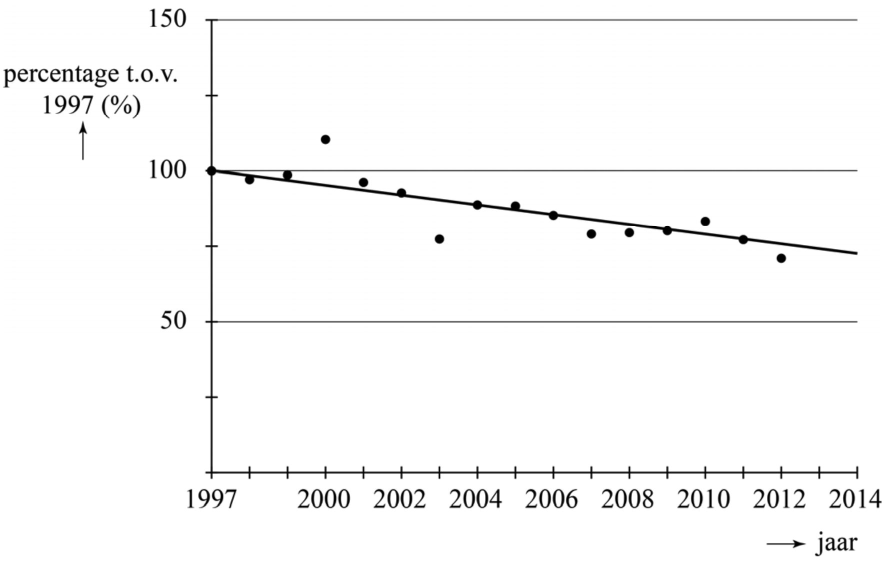
4p **11** Bereken na hoeveel jaar het aantal exoten volgens de bovenstaande exponentiële groei voor het eerst verdubbeld is. Geef je eindantwoord in hele jaren.

Er bestaat een zogenaamde rode lijst van diersoorten in Nederland die met uitsterven bedreigd worden. Daarom worden deze diersoorten ook wel **rodelijstsoorten** genoemd.

In figuur 2 is de ontwikkeling van de rodelijstsoorten in de periode 1997 – 2012 te zien. Hierbij zijn de aantallen aangegeven als percentage ten opzichte van het aantal in 1997.

In figuur 2 is ook een rechte lijn getekend die de ontwikkeling van het aantal rodelijstsoorten benadert. Volgens deze benadering neemt het aantal rodelijstsoorten vanaf 1997 lineair af.
Figuur 2 staat ook vergroot op de uitwerkbijlage.

figuur 2



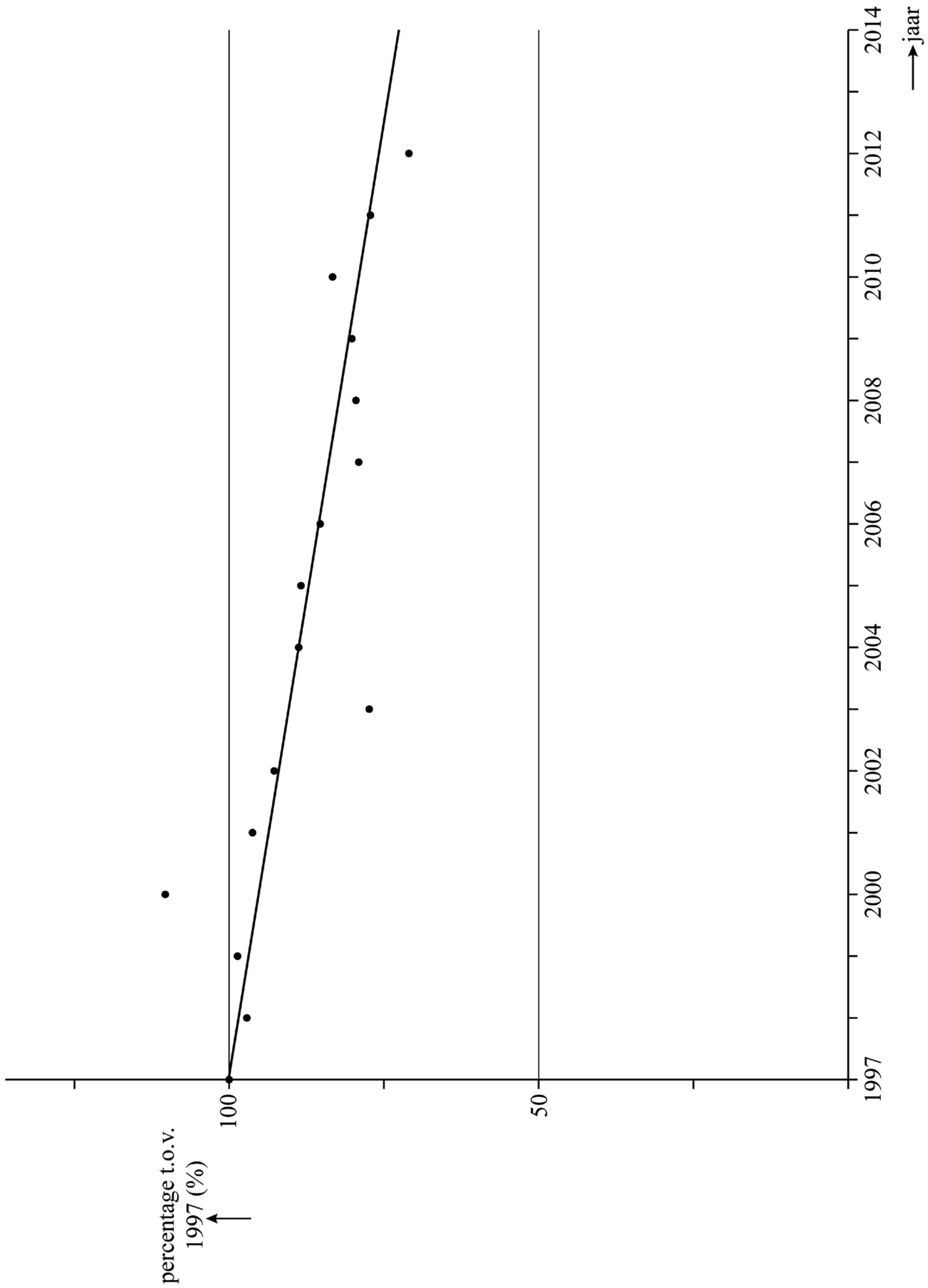
In 2004 was het werkelijke aantal rodelijstsoorten 694.

Met behulp van de lineaire afname volgens de getekende rechte lijn werd in 2013 een voorspelling gedaan voor het aantal rodelijstsoorten in 2020. Het daadwerkelijke aantal rodelijstsoorten in 2020 bleek 551 te zijn. Dit aantal is duidelijk hoger dan het aantal volgens de voorspelling.

5p **12** Bereken hoeveel het daadwerkelijke aantal rodelijstsoorten in 2020 verschilt met de voorspelling volgens de rechte lijn. Gebruik hiervoor de figuur op de uitwerkbijlage.

uitwerkbijlage

12



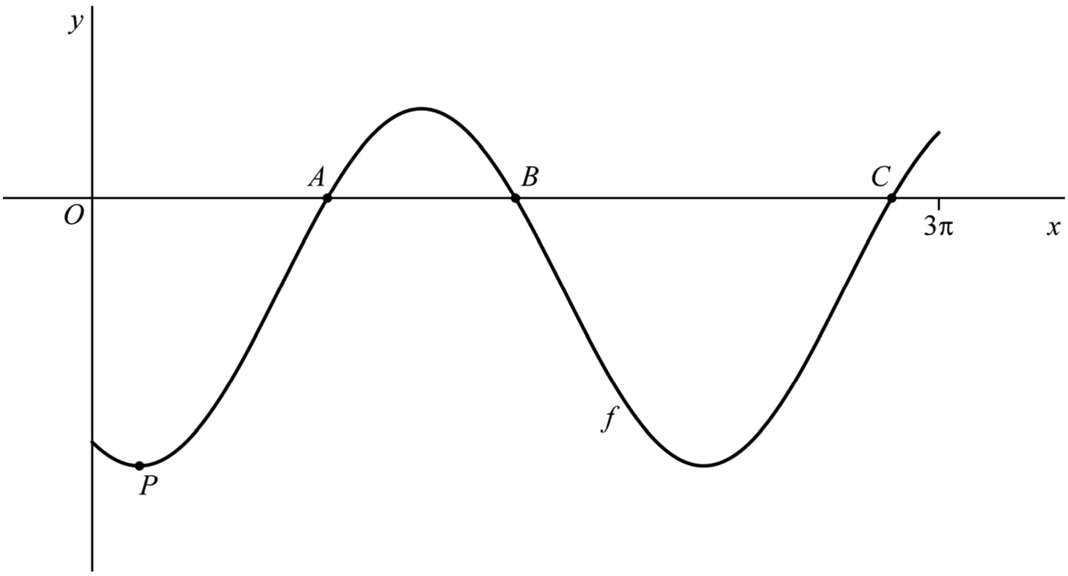
Drie snijpunten

Op het domein $[0, 3\pi]$ is de functie f gegeven door

$$f(x) = -1 + 2\sin\left(x - \tfrac{2}{3}\pi\right)$$

Op het gegeven domein is het punt P de eerste top rechts van de y-as van de grafiek van f. Zie de figuur.

figuur



4p **13** Bereken exact de coördinaten van P.

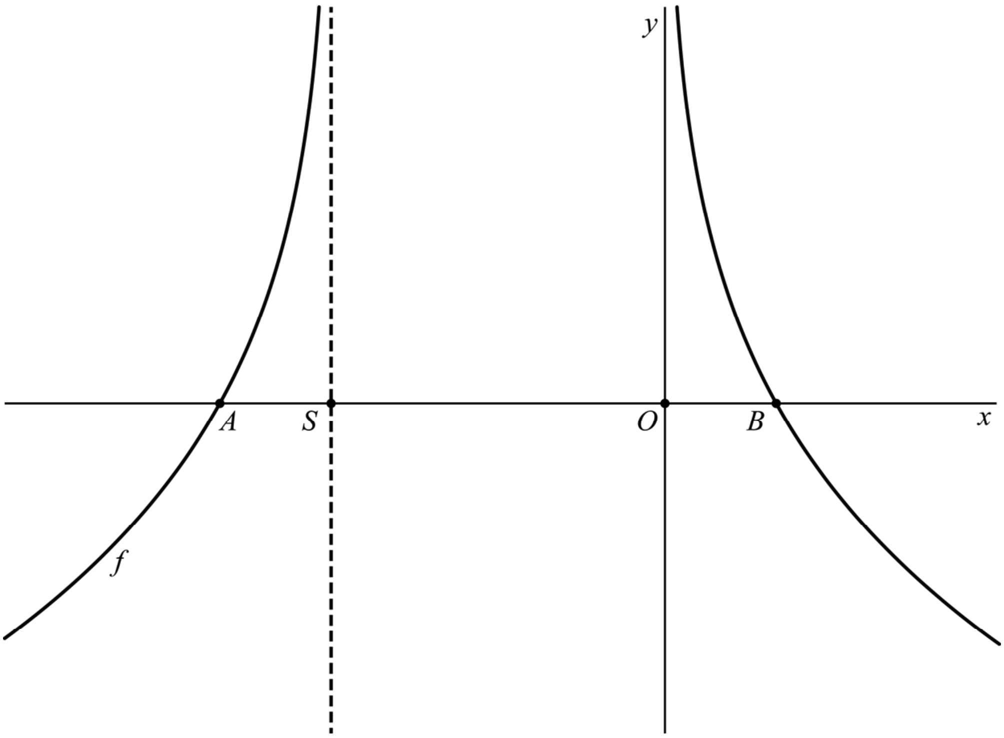
De punten A, B en C zijn de drie snijpunten van de grafiek van f met de x-as. Lijnstuk BC is a keer zo lang als lijnstuk AB.

5p **14** Bereken exact de waarde van a.

Functie met log

De functie f is gegeven door $f(x) = {}^{4}\log\left(\dfrac{2}{2x^2 + 3x}\right)$. De grafiek van f snijdt de x-as in de punten A en B. De asymptoten van de grafiek van f snijden de x-as in S en O. Zie de figuur.

figuur



3p **15** Bereken exact de x-coördinaat van S.

5p **16** Bereken exact de coördinaten van A en B.

Op het domein $\langle 0, \rightarrow \rangle$ is functie f ook te schrijven als:

$$f(x) = \tfrac{1}{2} - {}^{4}\log(x) - {}^{4}\log(2x+3)$$

3p **17** Toon dit aan.

In de schijnwerper

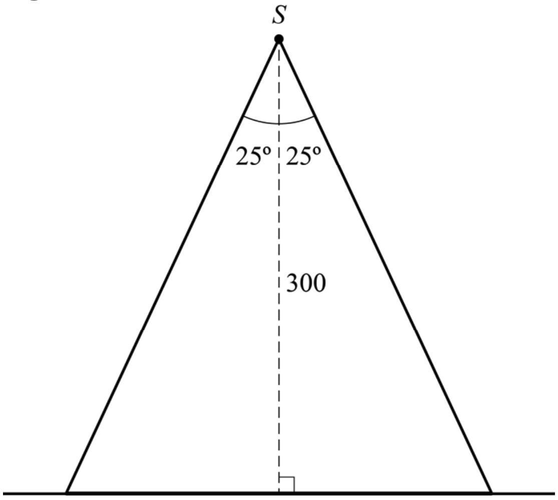
foto

Een lichtspot geeft een bundel licht. Zie de foto.
Voor de lichtbundel van een bepaalde lichtspot geldt dat in een zijaanzicht de buitenste lichtstralen een hoek van 50° met elkaar maken. Zie figuur 1.

figuur 1

Deze lichtspot hangt 300 cm boven een vloer. Als de lichtbundel recht naar beneden wordt gericht, ontstaat op de vloer een cirkelvormige lichtvlek. In figuur 2 is een zijaanzicht van deze situatie schematisch weergegeven. Hierin is S de lichtspot.

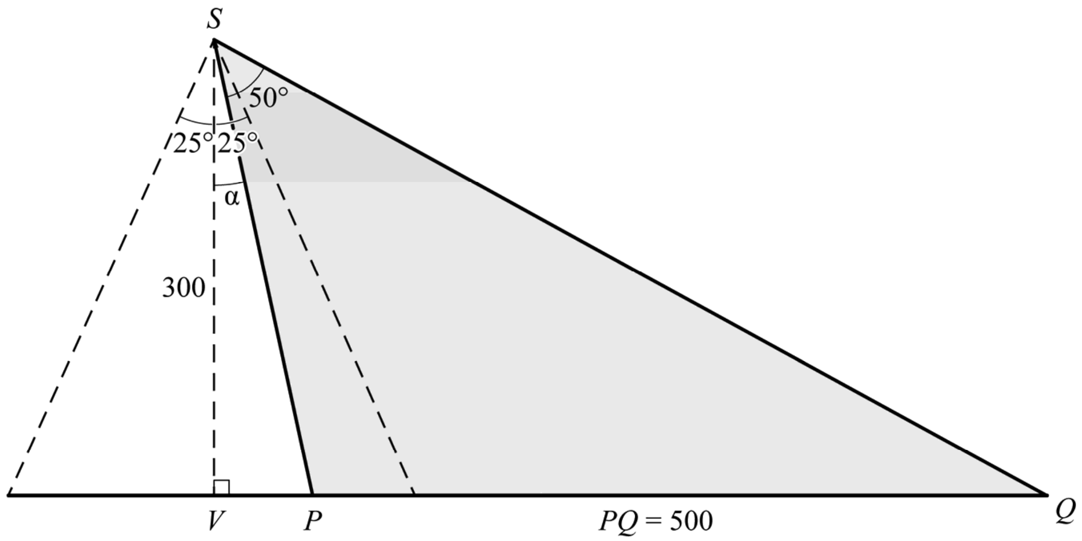
figuur 2



3p **18** Bereken de oppervlakte van de cirkelvormige lichtvlek. Geef je eindantwoord in gehele cm^2.

De lichtspot kan gedraaid worden, zodat de lichtbundel ook op andere delen van de vloer gericht kan worden. Hierbij blijft in een zijaanzicht de hoek tussen de buitenste lichtstralen 50°. Het is mogelijk om de lichtspot zo ver naar rechts te draaien dat er een 500 centimeter lange lichtvlek op de vloer ontstaat. Een zijaanzicht van deze situatie is in figuur 3 schematisch weergegeven.

figuur 3



In figuur 3 is PQ de lengte van de lichtvlek. V is het punt op de vloer recht onder S en $\alpha = \angle VSP$. Er geldt dus: $\angle PSQ = 50°$.

$\angle SQV$ is uit te drukken in α. Met behulp van de sinusregel in driehoek PSQ kan SP ook uitgedrukt worden in α.
Er geldt:

$$SP \approx 653 \cdot \sin(40° - \alpha) \qquad (1)$$

3p **19** Toon dit aan.

In driehoek VSP geldt:

$$SP = \frac{300}{\cos(\alpha)} \qquad (2)$$

Met behulp van formule (1) en formule (2) is hoek α te berekenen.

4p **20** Bereken hoeveel graden de lichtspot vanuit de situatie in figuur 2 naar rechts gedraaid moet worden om de situatie van figuur 3 te krijgen. Geef je eindantwoord in gehele graden.

Bronvermelding

Een opsomming van de in dit examen gebruikte bronnen, zoals teksten en afbeeldingen, is te vinden in het bij dit examen behorende correctievoorschrift, dat na afloop van het examen wordt gepubliceerd.